Radijvektori u $V^3(O)$

Zadatak 1. Za koje vrijednosti parametara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ zadani s

(a) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \mu\vec{k},$

(b) $\vec{a} = -\lambda\vec{i} + 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}, \quad \vec{b} = \mu\vec{k}, \quad \vec{c} = -\lambda\vec{i} + (\lambda + \mu)\vec{j}$

čine bazu za $V^3(O)$?

Rješenje. (a) Ispitujemo za koje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno nezavisni. Za skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{v} \\ &= \alpha(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) + \beta(2\vec{i} + \lambda\vec{j} + 6\vec{k}) + \gamma(\vec{i} + \mu\vec{k}) \\ &= (\alpha + 2\beta + \gamma)\vec{i} + (\alpha + \lambda\beta)\vec{j} + (3\alpha + 6\beta + \mu\gamma)\vec{k}.\end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ posljednja jednakost je ekvivalentna

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \lambda\beta = 0, \\ 3\alpha + 6\beta + \mu\gamma = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ (\lambda - 2)\beta - \gamma = 0, \\ (\mu - 3)\gamma = 0. \end{cases}$$

Ovdje smo dodali prvu jednadžbu pomnoženu s -1 drugoj i pomnoženu s -3 trećoj; tako smo dobili trokutasti sustav.

Pitamo se za koje vrijednosti parametara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Slučajeve promatramo s obzirom na to kad su dijagonalni koeficijenti jednaki 0. Ako je $\lambda \neq 2$ i $\mu \neq 3$, tada se lako dobije da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jedinstveno rješenje pa su vektori linearno nezavisni. Za $\lambda = 2$ nije teško provjeriti da je $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0$ primjer netrivijalnog rješenja pa vektori nisu linearno nezavisni. Analogno, za $\mu = 3$ lako vidimo da je $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$ primjer netrivijalnog rješenja pa vektori nisu linearno nezavisni.

Zaključujemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza za $V^3(O)$ ako i samo ako je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ i $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(b) Ispitujemo za koje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno nezavisni. Za skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{v} \\ &= \alpha(-\lambda\vec{i} + 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}) + \beta(\mu\vec{k}) + \gamma(-\lambda\vec{i} + (\lambda + \mu)\vec{j}) \\ &= (-\lambda\alpha - \lambda\gamma)\vec{i} + (2\lambda\alpha + (\lambda + \mu)\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + \mu\beta)\vec{k}.\end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ posljednja jednakost je ekvivalentna

$$\begin{cases} -\lambda\alpha - \lambda\gamma = 0, \\ 2\lambda\alpha + (\lambda + \mu)\gamma = 0, \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda\alpha - \lambda\gamma = 0, \\ (-\lambda + \mu)\gamma = 0, \\ \mu\beta - \lambda\gamma = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda\alpha + \lambda\gamma = 0, \\ \mu\beta - \lambda\gamma = 0, \\ (-\lambda + \mu)\gamma = 0. \end{cases}$$

Prvo smo dodali prvu jednadžbu pomnoženu s 2 drugoj i pomnoženu s 1 trećoj. Zatim smo prvu jednadžbu pomnožili s -1 i zamijenili poredak druge i treće jednadžbe; sada imamo trokutasti sustav.

Pitamo se za koje vrijednosti parametara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Slučajeve promatramo s obzirom na to kad su dijagonalni koeficijenti jednaki 0. Ako je $\lambda \neq \mu$ i $\lambda, \mu \neq 0$, tada se lako dobije da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jedinstveno rješenje pa su vektori linearno nezavisni. Za $\lambda = \mu$ nije teško provjeriti da je $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -1$ primjer netrivijalnog rješenja pa vektori nisu linearno nezavisni. Za $\lambda = 0$ lako vidimo da je $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ primjer netrivijalnog rješenja pa vektori nisu linearno nezavisni. Analogno, za $\mu = 0$ lako vidimo da je $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ primjer netrivijalnog rješenja pa vektori nisu linearno nezavisni.

Zaključujemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza za $V^3(O)$ ako i samo ako vrijedi $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\lambda \neq \mu$.

$\square$

Zadatak 2. Pokažite da su sljedeći skupovi vektora komplanarni:

(a) $\{\vec{i}-\vec{j}, \vec{j}-\vec{k}, \vec{k}-\vec{i}\}$,

(b) $\{\vec{i}+\vec{k}, -\vec{i}+2\vec{j}, 3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\}$,

(c) $\{\vec{i}+2\vec{j}, 2\vec{i}+4\vec{j}, -\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\}$,

(d) $\{(1-t)\vec{i}+t\vec{j}+\vec{k} : t \in \mathbb{R}\}$.

Rješenje. U svakom od skupova naći ćemo dva nekolinearna vektora; tada postoji (jedinstvena) ravnina π kroz ishodište koja ih sadrži. Nakon toga ćemo pokazati da su ostali vektori iz skupa prikazivi kao linearne kombinacije ta dva te stoga leže u istoj ravnini π.

(a) Ovdje je riječ o tri vektora pa je dovoljno pokazati da nisu linearno nezavisni. Ispitujući linearnu nezavisnost na standardni način, lako dolazimo do izraza

$$1 \cdot (\vec{i}-\vec{j}) + 1 \cdot (\vec{j}-\vec{k}) + 1 \cdot (\vec{k}-\vec{i}) = \vec{0}$$

pa zaključujemo da su vektori komplanarni.

(b) Odaberimo nekolinearne vektore $\vec{i}+\vec{k}$ i $-\vec{i}+2\vec{j}$ te lako izračunamo da za ostale vektore vrijedi

$$3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k} = (\vec{i}+\vec{k}) - 2(-\vec{i}+2\vec{j}), \qquad \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} = 2(\vec{i}+\vec{k}) + (-\vec{i}+2\vec{j}).$$

Dakle, svi vektori leže u ravnini kroz ishodište određenoj s $\vec{i}+\vec{k}$ i $-\vec{i}+2\vec{j}$.

(c) Odaberimo nekolinearne vektore $\vec{i}+2\vec{j}$ i $-\vec{j}+\vec{k}$ te lako izračunamo da za ostale vektore vrijedi

$$2\vec{i}+4\vec{j} = 2(\vec{i}+2\vec{j}), \qquad \vec{i}+\vec{j}+\vec{k} = (\vec{i}+2\vec{j}) + (-\vec{j}+\vec{k}).$$

Dakle, svi vektori leže u ravnini kroz ishodište određenoj s $\vec{i}+2\vec{j}$ i $-\vec{j}+\vec{k}$.

(d) Za $t=0$ odnosno $t=1$ odaberimo nekolinearne vektore $\vec{i}+\vec{k}$ i $\vec{j}+\vec{k}$ te lako izračunamo da za ostale vektore vrijedi

$$(1-t)\vec{i}+t\vec{j}+\vec{k} = (1-t)(\vec{i}+\vec{k}) + t(\vec{j}+\vec{k}), \qquad \text{za proizvoljan } t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, svi vektori leže u ravnini kroz ishodište određenoj s $\vec{i}+\vec{k}$ i $\vec{j}+\vec{k}$.

Drugo rješenje. Iz analitičke geometrije znamo da je ravnina kroz ishodište u trodimenzionalnom prostoru definirana jednadžbom $Ax+By+Cz=0$ za neke koeficijente $A,B,C \in \mathbb{R}$ koji nisu svi jednaki 0. Stoga zadatak možemo riješiti i tako da eksplicitno nađemo jednadžbu ravnine gornjeg oblika koja sadrži krajnje točke zadanih radijvektora. U svakom od podzadataka dobivamo sljedeće ravnine:

(a) $x+y+z=0$,

(b) $2x+y-2z=0$,

(c) $2x-y-z=0$,

(d) $x+y-z=0$.

□

Zadatak 3. Pretpostavimo da su $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V^3(O)$ nekomplanarni vektori. Pokažite da vektori

$$\vec{v}_1, \vec{v}_1+\vec{v}_2, \vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$$

čine bazu za $V^3(O)$. Prikažite vektor $\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2+\gamma\vec{v}_3 \in V^3(O)$ za $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

Rješenje. Pokazujemo linearnu nezavisnost vektora $\vec{v}_1, \vec{v}_1+\vec{v}_2, \vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$. Za skalare $A,B,C \in \mathbb{R}$ imamo

$$\vec{0} = A\vec{v}_1 + B(\vec{v}_1+\vec{v}_2) + C(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3) = (A+B+C)\vec{v}_1 + (B+C)\vec{v}_2 + C\vec{v}_3.$$

Budući da su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linearno nezavisni, gornja jednakost je ekvivalentna s

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ \quad\;\; B+C=0, \\ \qquad\quad C=0. \end{cases}$$

odakle lako dobivamo $A=B=C=0$.

Fiksirajmo neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Tražimo skalare $A, B, C \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = A\vec{v}_1 + B(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + C(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (A+B+C)\vec{v}_1 + (B+C)\vec{v}_2 + C\vec{v}_3.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ smijemo izjednačiti koeficijente pa je prethodna jednakost ekvivalentna s

$$\begin{cases} A+B+C=\alpha, \\ \quad\;\; B+C=\beta, \\ \qquad\quad C=\gamma. \end{cases}$$

odakle očitavamo da je jedinstveno rješenje dano s $C=\gamma$, $B=\beta-\gamma$, $A=\alpha-\beta$. Dakle, zaključujemo da je traženi prikaz dan s

$$(\alpha-\beta)\vec{v}_1 + (\beta-\gamma)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \gamma(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3.$$

$\square$