Linearna algebra 1

probni 1. kolokvij – rješenja

14. 11. 2023.

1. Pokušajmo sustav transformirati na ekvivalentni sustav koji je gornje-trokutast:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ 2\lambda x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ 3\lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \qquad\quad x_3 = 1, \\ \quad - \ \ x_2 - \qquad\quad x_3 = -1, \\ \quad - 2x_2 + (\lambda - 3)x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \qquad x_3 = 1, \\ \quad - x_2 - \qquad x_3 = -1, \\ \qquad\qquad (\lambda - 1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Sada razmatramo slučajeve s obzirom na to jesu li dijagonalni koeficijenti λ, -1, $\lambda - 1$ nula ili različiti od nula.

1° Pretpostavimo $\lambda = 1$. Tada je sustav ekvivalentan s

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

odakle dobivamo $x_2 = 1 - x_3$ te $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 0$. Dakle, ako stavimo $x_3 = t$, sva rješenja su dana s

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1 - t, t), \qquad \text{za proizvoljan } t \in \mathbb{R}.$$

Radijvektorski, imamo da su vektori

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \qquad \vec{b} = (1, 1, 1), \qquad \vec{c} = (1, 1, 1)$$

nekolinearni ali komplanarni, te je $\vec{d} = (1, 1, 1)$ komplanaran s njima pa sustav ima ∞ rješenja ovisnih o jednom parametru.

2° Pretpostavimo $\lambda = 0$. Tada je sustav ekvivalentan

$$\begin{cases} \quad x_2 + x_3 = 1, \\ -x_2 - x_3 = -1. \\ \qquad - x_3 = 0. \end{cases}$$

odakle dobivamo $x_3 = 0$ te $x_2 = 1 - x_3 = 1$ dok za x_1 nema nikakvih podataka. Dakle, ako stavimo $x_1 = t$, sva rješenja su dana s

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 1, 0), \qquad \text{za proizvoljan } t \in \mathbb{R}.$$

Radijvektorski, imamo da su vektori

$$\vec{a} = (0, 0, 0), \qquad \vec{b} = (1, 1, 1), \qquad \vec{c} = (1, 1, 0)$$

nekolinearni ali komplanarni, te je $\vec{d} = (1, 1, 1)$ komplanaran s njima pa sustav ima ∞ rješenja ovisnih o jednom parametru.

3° Pretpostavimo $\lambda \notin \{0,1\}$. Tada je sustav ekvivalentan

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ - x_2 - x_3 = -1. \\ (\lambda - 1)x_3 = 0. \end{cases}$$

odakle dobivamo $x_3 = 0$ te $x_2 = 1 - x_3 = 1$ i zatim $x_1 = \frac{1}{\lambda}(1 - x_2 - x_3) = 0$. Stoga, rješenje je jedinstveno te je dano s

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0).$$

Radijvektorski, imamo da su vektori

$$\vec{a} = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda), \qquad \vec{b} = (1,1,1), \qquad \vec{c} = (1,1,\lambda)$$

nekomplanarni pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Time smo iscrpili sve mogućnosti za λ pa je diskusija završena.

2. (a) Promotrimo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skup će biti linearno nezavisan ako i samo ako je rang matrice A jednak 4. Računamo rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_4.$$

Imamo $r(A) = r(D_4) = 4$ pa je skup zaista linearno nezavisan.

(b) Promotrimo matricu

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Vektor $(1,0,0,0,-1)$ će biti linearna kombinacija vektora iz gornjeg skupa ako i samo ako je $r(B) = r(A)$. Računamo rang matrice B:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = D_4.$$

Imamo $r(B) = r(D_4) = 4 = r(A)$ pa zaključujemo da vektor jest njihova linearna kombinacija.

3. Računamo rang elementarnim transformacijama:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & 0 & \lambda \\ 7 & \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & \lambda+4 \\ 0 & \lambda+4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\lambda \neq 0$, tada množenjem zadnjeg stupca s $\frac{1}{\lambda}$ dobivamo da je zadnja matrica ekvivalentna matrici

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} D_3, & \text{ako je } \lambda = 6, \\ D_4, & \text{ako je } \lambda \neq 6 \text{ (i mora vrijediti } \lambda \neq 0 \text{ od ranije).} \end{cases}$$

Ako je pak $\lambda = 0$, tada je A ekvivalentna matrici

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_3.$$

Sve skupa zaključujemo

$$A \sim \begin{cases} D_3, & \text{ako je } \lambda \in \{0, 6\}, \\ D_4, & \text{ako je } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\} \end{cases}$$

odnosno

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \text{ako je } \lambda \in \{0, 6\}, \\ 4, & \text{ako je } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}. \end{cases}$$

4. Polinom možemo faktorizirati kao

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

pa je

$$\begin{aligned} p(A) = (A+I)(A-I)(A-2I) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

odakle slijedi da je $\operatorname{Tr} p(A) = 0 + 0 + 0 = 0$.