Linearna algebra 1

1. kolokvij – rješenja

21. 11. 2023.

1. Pokušajmo sustav transformirati na ekvivalentni sustav koji je gornje-trokutast:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x_2 + (1-\lambda^2)x_3 = 2 - 2\lambda, \\ (\lambda-1)x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2-\lambda-\lambda^2)x_3 = 2 - 2\lambda, \\ (\lambda-1)x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ (\lambda-1)x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \\ -(\lambda-1)(\lambda+2)x_3 = 2(1-\lambda). \end{cases}$$

Sada razmatramo slučajeve s obzirom na to jesu li dijagonalni koeficijenti $1, \lambda - 1$ i $-(\lambda-1)(\lambda+2)$ nula ili različiti od nula.

1° Pretpostavimo $\lambda = 1$. Tada je sustav ekvivalentan s jednadžbom

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

odakle dobivamo $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ pa zaključujemo da su sva rješenja dana s

$$(x_1, x_2, x_3) = (u, v, 2 - u - v), \qquad \text{za proizvoljne } u, v \in \mathbb{R}.$$

Radijvektorski u originalnom sustavu imamo da su vektori

$$\vec{a} = (1,1,1), \qquad \vec{b} = (1,1,1), \qquad \vec{c} = (1,1,1)$$

kolinearni, te je $\vec{d} = (2,2,2)$ komplanaran s njima pa sustav ima ∞ rješenja ovisnih o dva parametra.

2° Pretpostavimo $\lambda = -2$. Tada je zadnja jednadžba ekvivalentna $0 = -2$ pa sustav nema rješenja. Radijvektorski u originalnom sustavu imamo da su vektori

$$\vec{a} = (-2,1,1), \qquad \vec{b} = (1,-2,1), \qquad \vec{c} = (1,1,-2)$$

komplanarni, ali $\vec{d} = (2,2,2)$ nije komplanaran s njima pa sustav nema rješenja.

3° Pretpostavimo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$. Tada iz treće jednadžbe slijedi

$$x_3 = \frac{2}{\lambda + 2}.$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$x_2 - x_3 = 0 \implies x_2 = x_3 = \frac{2}{\lambda + 2}$$

te zatim iz prve dobivamo

$$x_1 = 2 - x_2 - \lambda x_3 = 2 - \frac{2}{\lambda+2} - \frac{2\lambda}{\lambda+2} = \frac{2}{\lambda+2}.$$

Stoga, rješenje je jedinstveno te je dano s

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{\lambda+2}, \frac{2}{\lambda+2}, \frac{2}{\lambda+2}\right).$$

Radijvektorski u originalnom sustavu imamo da su vektori

$$\vec{a} = (\lambda, 1, 1), \qquad \vec{b} = (1, \lambda, 1), \qquad \vec{c} = (1, 1, \lambda)$$

nekomplanarni pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Time smo iscrpili sve mogućnosti za λ pa je diskusija završena.

2. (a) Promotrimo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skup će biti linearno nezavisan ako i samo ako je rang matrice A jednak 3. Računamo rang:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_3.$$

Imamo $r(A) = r(D_3) = 3$ pa je skup zaista linearno nezavisan.

(b) Promotrimo matricu

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Vektor $(0, 1, 0, 1, 0)$ će biti linearna kombinacija vektora iz gornjeg skupa ako i samo ako je $r(B) = r(A)$. Računamo rang matrice B:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Prva tri stupca zadnje matrice su linearno nezavisni, to znamo iz prijašnjeg računa za matricu A. Nadalje, jasno je da četvrti stupac nije prikaziv kao linearna kombinacija prva tri jer na četvrtoj koordinati četvrti stupac ima 1, a prva tri imaju 0. Dakle, sva četiri stupca su linearno nezavisni pa slijedi $r(B) = 4$.

Slijedi $r(B) \neq r(A)$ pa zaključujemo da vektor nije njihova linearna kombinacija.

3. Računamo rang elementarnim transformacijama:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & \lambda & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 12 & 4 & 6 & -15 \\ -20 & 7 & 10 & -25 \\ -4 & 2 & \lambda - 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & 3 \\ -20 & 0 & 10 & 5 \\ -4 & 0 & \lambda - 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & \lambda - 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} D_3, & \text{ako je } \lambda = 0 \text{ ili } \lambda = 4, \\ D_4, & \text{ako je } \lambda \neq 0 \text{ i } \lambda \neq 4. \end{cases}$$

Zaključujemo:

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \text{ako je } \lambda \in \{0, 4\}, \\ 4, & \text{ako je } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}. \end{cases}$$

4. Imamo $\operatorname{Tr} A = 2 + 1 + 1 = 4$ pa vrijedi

$$p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Zaključujemo

$$p(A) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$