

Linearna algebra 1

2. domaća zadaća

17. 01. 2025.

1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja zadovoljava $(A+2I)^2 = 0$. Dokažite da je A regularna.
2. Neka je $P \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja zadovoljava $P^2 = P$. Dokažite da je tada matrica $P - \lambda I$ regularna za svaki $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$. *Uputa: inverz možete potražiti u obliku $\alpha P + \beta I$ za neke koeficijente $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ koji ovise o λ .*
3. Dokažite da za sve matrice $A, B \in M_2(\mathbb{F})$ takve da je A regularna vrijedi formula

$$\det(A + B) = (1 + \operatorname{Tr}(A^{-1}B)) \det A + \det B.$$

4. Za $n \in \mathbb{N}$ izračunajte determinante reda n :

$$(a) \quad D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (b) \quad D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Izračunajte (ako postoji) inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$