

Poglavlje 4

Matrični prikaz (zapis) linearnog operatora

Neka su V, W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V odnosno W .

- (1) Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstveni prikaz oblika $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ koji zapisujemo u jednostupčanoj matrici

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis zovemo **matrični prikaz vektora x u bazi (e)** , i on ovisi o bazi.

- (2) Neka je $A \in L(V, W)$. Operator A je potpuno određen svojim djelovanjem na bazi. Vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ su u W pa ih možemo prikazati u bazi (f) kao

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tako dobivene koeficijente pišemo u matricu

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Ovaj zapis zovemo **matrični zapis operatora A u paru baza $(e), (f)$** . Po stupcima imamo matrične zapise vektora Ae_j u bazi (f) , $j = 1, \dots, n$, tj.

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} (Ae_1)(f) & (Ae_2)(f) & \dots & (Ae_n)(f) \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.1. Zadan je jedinični operator $I : V \rightarrow V$, $I(v) = v$ i dvije baze $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ vektorskog prostora V . Dokažite da je $I(f, e) = I$ ako i samo ako je $(f) = (e)$.

RJEŠENJE Primijetimo da je $I(f, e) = I$ ako i samo ako je $I(e_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$, odnosno ako i samo ako je $e_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$, odnosno ako i samo ako je $(e) = (f)$ □

ZADATAK 4.2. Odredite matricu operatora $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$, u kanonskom paru baza.

RJEŠENJE Neka je $s(e) = \{e_1, e_2\}$ označena kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, a $s(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Vrijedi da je

$$T(e_1) = (1, 1, 1) = f_1 + f_2 + f_3, \quad T(e_2) = (1, -1, 0) = f_1 - f_2.$$

Stoga je

$$T(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.3. Odredite matricu operatora $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ zadanog sa

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} x - y & y - z \\ z - x & x + y + z \end{bmatrix}$$

u kanonskom paru baza.

RJEŠENJE Označimo kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$ s $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$, a za $M_2(\mathbb{R})$ s $(E) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Tada je

$$\begin{aligned} S(e_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{21} + E_{22} \\ S(e_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E_{11} + E_{12} + E_{22} \\ S(e_3) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -E_{12} + E_{21} + E_{22} \end{aligned}$$

pa je

$$S(E, e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.4. Neka je $A : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (u $\mathcal{P}_3$ su polinomi stupnja ≤ 3) linearan operator zadan s $A(p) = (p(0), p(1))$. Nađite mu matricu u kanonskom paru baza.

RJEŠENJE Označimo sa $(e) = (1, t, t^2, t^3)$ kanonsku bazu za $\mathcal{P}_3$, a sa $(f) = ((1, 0), (0, 1))$ kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$. Vrijedi $A(e_1) = (1, 1)$, $A(e_2) = (0, 1)$, $A(e_3) = (0, 1)$, $A(e_4) = (0, 1)$ pa je

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.5. Neka je $A \in M_2$ i $T : M_2 \rightarrow M_2$ zadan s $T(X) = AX$. Odredite matrični prikaz tog linearnog operatora u paru kanonskih baza.

RJEŠENJE Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $T(E_{11}) = aE_{11} + cE_{21}$, $T(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}$, $T(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21}$, $T(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}$. Označimo $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ pa je

$$T(e) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}$$

□

ČINJENICE 4.1. 1. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V , W , $x \in V$, $A \in L(V, W)$. Tada je

$$Ax(f) = A(f, e)x(e). \quad (4.1)$$

2. Neka su $(e), (f), (g)$ baze za V , W , X i neka su $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, X)$. Tada je $BA \in L(V, X)$ i

$$BA(g, e) = B(g, f)A(f, e). \quad (4.2)$$

4.1 Promjena baze

Sada želimo istražiti što se događa ako mijenjamo baze za prostore V , odnosno W .

ČINJENICE 4.2. Neka je $A \in L(V, W)$, $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(e') = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V , a $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$, $(f') = \{f'_1, \dots, f'_m\}$ dvije baze za W .

1. Operator A i matrični prikaz operatora $A(f, e)$ u bilo kojem paru baza $(e), (f)$ imaju isti rang, tj.

$$r(A) = r(A(f, e)). \quad (4.3)$$

Posebno je A regularan operator ako i samo ako je matrica $A(e)$ regularna.

2. Vrijedi

$$A(f', e') = I_W(f', f)A(f, e)I_V(e, e') = I_W(f, f')^{-1}A(f, e)I_V(e, e') \quad (4.4)$$

Matricu $I_V(e, e')$ zovemo **matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e')** .

NAPOMENA 4.3. Matricu prijelaza $I(e, e')$ možemo zapisati i kao $S(e)$, gdje je $S \in L(V)$ operator zadan na bazi s $Se_i = e'_i$, $i = 1, \dots, n$.

3. Specijalno ako je $V = W$, imamo

$$A(e') = I_V(e', e)A(e)I_V(e, e') = I_V(e, e')^{-1}A(e)I_V(e, e'). \quad (4.5)$$

DEFINICIJA 4.4. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B **slična** matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = S^{-1}AS$.

Dakle, formula (4.5) kaže da su matrični prikazi operatora $A \in L(V)$ u različitim bazama slične matrice.

4. Vrijedi i da je za $x \in V$

$$x(e') = I_V(e', e)x(e) = I_V(e, e')^{-1}x(e). \quad (4.6)$$

5. Ako su (e) , (e') i (e'') tri baze za V , imamo sljedeću vezu između njih:

$$I_V(e', e'') = I_V(e', e)I_V(e, e'') = I_V(e, e')^{-1}I_V(e, e''). \quad (4.7)$$

ZADATAK 4.6. Odredite matricu prijelaza iz baze $(e) = \{1, t, t^2\}$ u bazu $(e') = \{1 - t, 1 + t^2, t^2\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ (i obratno).

RJEŠENJE

$$I_{\mathcal{P}_2}(e, e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obratno je

$$I_{\mathcal{P}_2}(e', e) = I_{\mathcal{P}_2}(e, e')^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.7. Odredite matricu prijelaza iz baze $(e') = \{(1, 2), (2, 3)\}$ u bazu $(e'') = \{(1, 1), (1, -1)\}$ za $\mathbb{R}^2$ (nijedna nije kanonska).

RJEŠENJE Vrijedi da je

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}^2}(e', e'') &= I_{\mathbb{R}^2}(e', e) I_{\mathbb{R}^2}(e, e'') = I_{\mathbb{R}^2}(e, e')^{-1} I_{\mathbb{R}^2}(e, e'') \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.8. U $\mathbb{R}^3$ s (e) označimo kanonsku bazu. Zadana je i baza $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, gdje su $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1$. Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadanog s $Ae_i = e'_i$, $i = 1, 2, 3$, u bazi (e') .

RJEŠENJE Imamo

$$A(e) = I_{\mathbb{R}^3}(e, e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je

$$A(e') = I_{\mathbb{R}^3}(e, e')^{-1} A(e) I_{\mathbb{R}^3}(e, e') = A(e)^{-1} A(e) A(e) = A(e).$$

ZADATAK 4.9. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1, 1, 2), (2, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite

- (a) $(e_1 + e_3)(e)$,
- (b) $(e'_1 - e'_2)(e)$,
- (c) $(e_1 - e_2)(e')$,
- (d) $(e'_1 - e'_3)(e')$.

RJEŠENJE

- (a) $(e_1 + e_3)(e) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- (b) $(e'_1 - e'_2)(e) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$(c) (e_1 - e_2)(e') = I(e, e')^{-1}(e_1 - e_2)(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(d) (e'_1 - e'_3)(e') = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

ZADATAK 4.10. Zadana je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatora $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ u paru baza $(e') = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ i $(f') = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Neka su (e) i (f) kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned} (Ax)(f) &= A(f, e)x(e) = I_{M_2(\mathbb{R})}(f, f')A(f', e')I_{\mathbb{R}^3}(e, e')^{-1}x(e) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pa je

$$Ax = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

□

ZADATAK 4.11. Zadan je operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ matricom $A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ u bazi $(e') =$

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ te operator $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ matricom $B(f', e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ u paru

kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i baze $(f') = \{1, 1 - t, 1 + t^2\}$ za $\mathcal{P}_2$. Odredite matricu operatora BA u paru kanonskih baza.

RJEŠENJE Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a (f) kanonska baza za $\mathcal{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned} BA(f, e) &= B(f, e)A(e) = I_{\mathcal{P}_2}(f, f')B(f', e)I_{\mathbb{R}^3}(e, e')A(e')I_{\mathbb{R}^3}(e, e')^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

DZ 4.1. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^2)$, $A(x, y) = (x - y, x + y)$ u bazi $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

RJEŠENJE

$$A(e') = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

DZ 4.2. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathcal{P}_1)$, $A(x, y, z) = x + y + z + xt$ u paru baza $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ i $\{1 + t, 1 - 2t\}$.

RJEŠENJE

$$A(f', e') = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

DZ 4.3. Zadana je matrica $A(f, e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatora $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ u paru baza $\{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ i $\{1, t, t^2\}$. Odredite Ax .

RJEŠENJE

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)t + (x_1 - x_3)t^2.$$

DZ 4.4. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ linearni operator dan svojom matricom $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi. Neka je $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, a (e'') još jedna baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e''_1 = e_1$, $e''_2 = e_2$, $e''_3 = e_4$, $e''_4 = e_3$.

(a) Za $x = (1, -1, 2, 1)$ odredite $(Ax)(e)$, $(Ax)(e')$.

(b) Neka je $y(e') = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Odredite $(Ay)(e)$.

(c) Odredite matricu prijelaza iz baze (e) u (e'') i $A(e'')$.

(d) Odredite rang operatora A .

RJEŠENJE

$$(a) \quad (Ax)(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (Ax)(e') = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad (Ay)(e) = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad A(e'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \quad r(A) = 4$$

□

ZADATAK 4.12. Neka je $Z_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zrcaljenje s obzirom na pravac s jednadžbom $y = kx$, $k \neq 0$. Odredite matrični prikaz operatora Z_k u kanonskoj bazi te matrični prikaz u još jednoj, po volji odabranoj bazi.

RJEŠENJE Iz jednog od prijašnjih zadataka znamo da je

$$Z_k(x, y) = \frac{2}{k^2 + 1}(x + ky, kx + k^2y) - (x, y).$$

Stoga je

$$Z_k(e) = \begin{bmatrix} \frac{2}{k^2+1} - 1 & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{2k^2}{k^2+1} - 1 \end{bmatrix}.$$

Linearni operator Z_k će imati "najjednostavniji" matrični prikaz u bazi koju čine neki vektor koji pripada pravcu $y = kx$ i vektor koji leži na pravcu koji je okomit na pravac $y = kx$, npr. $f_1 = (1, k)$, $f_2 = (1, \frac{-1}{k})$. Stavimo $(f) = \{f_1, f_2\}$. Imamo $Z_k(f_1) = f_1$ i $Z_k(f_2) = -f_2$ pa je

$$Z_k(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uočite da smo iz posljednjeg matričnog prikaza lako mogli doći i do matričnog prikaza $Z_k(e)$.

$$\text{Naime, vrijedi } Z_k(e) = I(e, f)Z_k(f)I(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix}^{-1}.$$

□