

Linearna algebra 2

Druga zadaća

Zadatak 1. Zadana je matrica

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Izračunajte A^{16} .

Zadatak 2. U ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zadan je linearni operator $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ svojom matricom

$$A_\alpha(e) = \begin{bmatrix} a-2 & 1 & 0 \\ 2a-4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

u kanonskoj bazi. Za koje vrijednosti α je operator A_α dijagonalizabilan?

Zadatak 3. Dokažite da je

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte $\|(1, 2)\|$ gdje je $\|\cdot\|$ inducirana norma.

Zadatak 4. Na realnom prostoru $\mathcal{P}_2$ s obzirom na skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in \mathcal{P}_2$$

ortonormirajte skup $\{1, t, t + t^2\}$.

Zadatak 5. U prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je potprostor

$$M := [(1, 1, 1, 1)] = \{(x, x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Nadite neku ortonormiranu bazu za $M^\perp$.