

Poglavlje 1

Unitarni prostori

1.1 Definicije i osnovna svojstva

DEFINICIJA 1.1. Neka je U (konačnodimenzijski) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \rightarrow \mathbb{F}$ preslikavanje sa svojstvima:

- (1) $\langle a, a \rangle \geq 0$
- (2) $\langle a, a \rangle = 0$ ako i samo ako je $a = 0$,
- (3) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$,
- (4) $\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$,
- (5) $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

za sve $a, b, c \in U$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zovemo **skalarno množenje** na prostoru U , a skalar $\langle a, b \rangle$ **skalarni produkt** vektora a i b . Uređeni par $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zovemo **unitarni prostor** nad poljem $\mathbb{F}$.

NAPOMENA 1.2. Dimenzija unitarnog prostora $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ po definiciji je dimenzija vektorskog prostora U .

Skalarni produkt se umjesto $\langle a, b \rangle$ piše i kao $(a, b) = (a|b)$.

Direktno iz definicije unitarnog prostora slijede ova njegova svojstva:

- (1') $\langle a, \beta b \rangle = \beta \langle a, b \rangle$,
- (2') $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$,

za sve $a, b, c \in U$, $\beta \in \mathbb{F}$. Također vrijedi

- (3') $\langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$, za sve $a \in U$.

PRIMJER 1.3. 1. Na prostoru $\mathbb{F}^n$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ s

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Ovo je skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$. Provjerimo mu svojstva:

- (1) $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}} = \overline{\langle x, y \rangle}$,

- (2) $\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) \overline{y_i} = \alpha \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = \alpha \langle x, y \rangle$,
 (3) $\langle x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \overline{z_i} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^n y_i \overline{z_i} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
 (4) Neka je $x \neq 0$. Tada je $x_i \neq 0$, za bar jedan i pa je

$$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = |x_i|^2 + \sum_{j \neq i}^n |x_j|^2 > 0.$$

Zato je $(\mathbb{F}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitarni prostor.

2. Neka su $a < b$ te $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ sa:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Ovo je dobro definirano preslikavanje i zadovoljava svojstva skalarnog produkta. Svojstva (1)-(3) proizlaze direktno iz svojstava Riemannovog integrala. Nadalje,

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)f(t) dt \geq \text{monotonost integrala} \geq \int_a^b 0 dt = 0.$$

Ako je $\langle f, f \rangle = 0$, onda je $f \equiv 0$ na $[a, b]$. Zaista, ako je $f(t_0) \neq 0$ za neko $t_0 \in [a, b]$, onda zbog neprekidnosti funkcije f postoji neka okolina $o(t_0)$ točke t_0 takva da je $f(t) \neq 0$ za sve $t \in o(t_0)$. No, tada je $\int_{o(t_0)} f(t)^2 dt > 0$ pa je i $\langle f, f \rangle > 0$.

3. Ne prostoru $M_n(\mathbb{C})$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ sa $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$. Ovo je skalarni produkt na $M_n(\mathbb{C})$. Provjerimo mu svojstva:

- (1) Za $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ je $\text{tr}(BA^*) = \text{tr}((AB^*)^*) = \overline{\text{tr}(AB^*)}$ pa je $\langle B, A \rangle = \overline{\langle A, B \rangle}$.
 (2) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ je: $\langle \alpha A, B \rangle = \text{tr}((\alpha A)B^*) = \alpha \text{tr}(AB^*) = \alpha \langle A, B \rangle$.
 (3) Za $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ je: $\langle A + B, C \rangle = \text{tr}((A+B)C^*) = \text{tr}(AC^* + BC^*) = \text{tr}(AC^*) + \text{tr}(BC^*) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$.
 (4) Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Stoga postoje $i, j \in \{1, \dots, n\}$ takvi da je $a_{ij} \neq 0$. Sada imamo:

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(AA^*) = \sum_{k=1}^n (AA^*)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \overline{a_{kl}} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |a_{kl}|^2 > 0.$$

Dakle, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalarno množenje i $(M_n(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitarni prostor.

4. Na prostoru $V^3(O)$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^3(O) \times V^3(O) \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &:= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &:= 0, \quad \text{za } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

Ovo je skalarni produkt na $V^3(O)$. Provjerimo mu svojstva:

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, tj. ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.
 (2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (dokazati geometrijski https://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product#/media/File:Dot_product_distributive Law.svg)

(3) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$, komentiraj za $\alpha > 0, \alpha < 0, \alpha = 0$.

(4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Zato je $(V^3(O), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Kut između vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ možemo računati koristeći relaciju:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

ZADATAK 1.1. Provjerite je li preslikavanje definirano s

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$$

skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Uzmimo npr. $x = (1, 0, 0), y = (1, 1, 0)$. Sada je

$$\langle x, y \rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 6, \quad (1.1)$$

$$\langle y, x \rangle = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 2. \quad (1.2)$$

Dakle, postoje $x, y \in \mathbb{R}^3$ takvi da $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ pa zaključujemo da preslikavanje nije skalarni produkt. □

ZADATAK 1.2. U sljedećim zadacima $\mathbb{C}^2$ i $M_n(\mathbb{R})$ promatramo kao unitarne prostore sa standardnim skalarnim produktom.

(a) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je

$$\langle (1, z), (2 - i, 3 + 2i) \rangle = i$$

(b) Ako je $A \in M_n$ antisimetrična matrica, dokažite da je $\langle A, I \rangle = 0$.

RJEŠENJE

(a) Vrijedi $\langle (1, z), (2 - i, 3 + 2i) \rangle = i$ ako i samo ako je $1 \cdot (2 + i) + z \cdot (3 - 2i) = i$. Iz toga vidimo da je jedino rješenje $z = \frac{-2}{3-2i} = \frac{-6}{13} - i \frac{4}{13}$.

(b) Budući da je A antisimetrična matrica, vrijedi $a_{ii} = 0$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pa je $\text{tr } A = 0$, a onda je $\langle A, I \rangle = \text{tr}(AI^*) = \text{tr } A = 0$. □

Teorem 1.4. (nejednakost Cauchy -Schwarz-Bunjakovskog:) Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$ bilo koji njegovi vektori. Tada vrijedi:

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni.

NAPOMENA 1.5. Na spomenutim unitarnim prostorima $C - S - B$ nejednakost izgleda ovako:

(1) Na $\mathbb{F}^n$ je $|\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2) \cdot (\sum_{i=1}^n |y_i|^2)$, uz $x_i, y_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n$.

(2) Na $C([a, b])$ je $(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b (f(t)^2)dt)(\int_a^b (g(t)^2)dt)$.

(3) Na $M_n(\mathbb{C})$ je $|\text{tr}(AB^*)|^2 \leq \text{tr}(AA^*) \text{tr}(BB^*)$.

DEFINICIJA 1.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa svojstvima:

- (1) $\|x\| \geq 0$, za svako $x \in V$,
- (2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ za svako $x \in V$,
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za svako $x, y \in V$.

Tada kažemo da je $\|\cdot\|$ **norma** na V , a uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zovemo **normirani prostor**.

NAPOMENA 1.7. (1) Neka je $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ neki unitarni prostor. Tada je sa

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in U$$

definirano preslikavanje $\|\cdot\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ koje je norma na U pa je $(U, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Prema tome, svaki unitarni prostor je ujedno i normirani prostor. No, obrat ne vrijedi. Klasa normiranih prostora je šira od klase unitarnih prostora.

- (2) U terminima norme inducirane skalarnim produktom na unitarnom prostoru U , nejednakost $C - S - B$ poprima oblik

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|,$$

za svaki izbor $a, b \in U$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni.

- (3) Po uzoru na $V^3(O)$ i u proizvoljnom realnom unitarnom prostoru U možemo definirati **kut vektora** x i y , uz $x, y \neq 0$ sa

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Uočimo da je gornja definicija dobra upravo zbog $C - S - B$.

DEFINICIJA 1.8. Neka je U unitarni prostor. Za vektor $a \in U$ kažemo da je **jedinični** ili **normiran** ako je $\|a\| = 1$.

NAPOMENA 1.9. Svaki vektor $a \in U, a \neq 0$ možemo normirati, tj. pridružiti mu vektor $a_0 = \frac{a}{\|a\|}$.

ZADATAK 1.3. Zadan je normirani prostor $(M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$, gdje je norma inducirana standardnim skalarnim produktom na $M_2(\mathbb{C})$. Odredite normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

RJEŠENJE Vrijedi $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} = \sqrt{0^2 + (-i) \cdot i + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

ZADATAK 1.4. Navedite neku bazu prostora simetričnih matrica reda 3, a zatim odredite duljinu svih njenih elemenata.

RJEŠENJE Jedna baza prostora simetričnih matrica reda 3 je dana s

$$\{E_{ij} + E_{ji} : i, j = 1, 2, 3, i \neq j\} \cup \{E_{ii}, i \in 1, 2, 3\}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
 \|E_{ij} + E_{ji}\| &= \sqrt{\langle E_{ij} + E_{ji}, E_{ij} + E_{ji} \rangle} \\
 &= \sqrt{\text{tr}((E_{ij} + E_{ji}) \cdot (E_{ij} + E_{ji})^*)} \\
 &= \sqrt{\text{tr}((E_{ij} + E_{ji}) \cdot (E_{ji} + E_{ij}))} \\
 &= \sqrt{\text{tr}(E_{ii} + E_{jj})} = \sqrt{2},
 \end{aligned}$$

dok je

$$\|E_{ii}\| = \sqrt{\langle E_{ii}, E_{ii} \rangle} = \sqrt{\text{tr}(E_{ii} \cdot E_{ii}^*)} = \sqrt{\text{tr}(E_{ii} \cdot E_{ii})} = \sqrt{\text{tr } E_{ii}} = 1.$$

□

ZADATAK 1.5. Odredite sve jedinične vektore $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ takve da izraz $|\langle x, a \rangle|$ ima maksimalnu moguću vrijednost, pri čemu je $a = (1, 2, 3)$. Kolika je ta vrijednost?

RJEŠENJE Iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\| = \|a\| = \sqrt{14}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su vektori x i a linearno zavisni, odnosno ako i samo ako je

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 2, 3),$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je x jedinični vektor, za jednakost je nužno i dovoljno $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}$. Dakle, maksimalna vrijednost je $\sqrt{14}$ i ona se postiže za $(x_1, x_2, x_3) = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$. □

ZADATAK 1.6. Dokažite da u svakom unitarnom prostoru U vrijedi relacija paralelograma, tj. da je

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
 \end{aligned}$$

□

ZADATAK 1.7. Neka je U realan unitaran prostor i neka su $x, y \in U$. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) $\|x\| = \|y\|$ ako i samo ako je $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.

(2) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x, y \rangle = 0$.

RJEŠENJE

(1) $\langle x + y, x - y \rangle = 0 \iff \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0$. Kako je U realan unitaran prostor, to je $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pa je $\langle x + y, x - y \rangle = 0 \iff \|x\|^2 = \|y\|^2 \iff \|x\| = \|y\|$.

(2) $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. Stoga je $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x, y \rangle = 0$. □

1.2 Ortonormirani sustavi vektora

DEFINICIJA 1.10. Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$. Kažemo da je vektor a **ortogonalan (okomit)** na vektor b i pišemo $a \perp b$ ako je $\langle a, b \rangle = 0$.

NAPOMENA 1.11. (1) Ako je vektor a okomit na vektor b , onda je i b okomit na a .

(2) Nul-vektor je okomit na sve vektore i to je jedini vektor s tim svojstvom.

ZADATAK 1.8. Zadani su polinomi $p(x) = 1 + x^2$ i $q(x) = x^2 + x - \frac{2}{5}$ u unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Ispitajte jesu li p i q ortogonalni.

RJEŠENJE Vrijedi $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx = 0$, dakle, p i q su ortogonalni polinomi.

DEFINICIJA 1.12. Neka je $S = \{a_1, \dots, a_m\}$ skup vektora iz unitarnog prostora U sa svojstvom da je $a_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, m$. Kažemo da je skup S

1. **ortogonalan sustav vektora** ako je $a_i \perp a_k$ za sve $i, k \in \{1, \dots, m\}, i \neq k$.
2. **ortonormiran sustav vektora** ako je S ortogonalan sustav vektora i vrijedi $\|a_i\| = 1$ za sve $i = 1, \dots, m$.

Specijalno, ako je S ortonormiran skup i baza, kažemo da je S **ortonormirana baza** za U .

NAPOMENA 1.13. Svaki ortogonalni skup vektora $\{a_1, \dots, a_m\}$ takvih da je $a_i \neq 0$ za sve $i \in \{1, \dots, m\}$ je linearno nezavisan. Zaista, neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ skalari takvi da je

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = 0.$$

Za proizvoljan $1 \leq j \leq m$, skalarnim množenjem obje strane jednakosti s α_j dobivamo

$$\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle a_j = \langle \alpha_1, \alpha_j \rangle a_1 + \dots + \langle \alpha_m, \alpha_j \rangle a_m = \langle \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, \alpha_j \rangle = \langle 0, \alpha_j \rangle$$

pa je $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = 0$ odakle slijedi $\alpha_j = 0$. Dakle, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, što smo i trebali dokazati.

Nadalje, ako je dimenzija unitarnog prostora U jednaka n i $\{a_1, \dots, a_m\}$ ortogonalni sustav u prostoru U pri čemu su svi $a_i \neq 0$, onda je $m \leq n$.

ZADATAK 1.9. Neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ortogonalni sustav vektora u U . Dokažite **Pitagorin teorem**:

$$\|a_1 + \dots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \dots + \|a_m\|^2.$$

RJEŠENJE Po pretpostavci je $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. Stoga je

$$\|a_1 + \dots + a_m\|^2 = \langle a_1 + \dots + a_m, a_1 + \dots + a_m \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle a_i, a_j \rangle = \sum_{i=1}^m \|a_i\|^2.$$

Neka je sada $\{a_1, \dots, a_m\}$ proizvoljan linearno nezavisan skup vektora unitarnog prostora U . Želimo pronaći ortonormirani sustav vektora $\{e_1, \dots, e_m\}$ iz U takav da vrijedi $[\{a_1, \dots, a_m\}] = [\{e_1, \dots, e_m\}]$, tj. želimo konstruirati ortonormiranu bazu za $[\{a_1, \dots, a_m\}]$.

Teorem 1.14. (*Gram - Schmidt*) Neka je $S = \{a_1, \dots, a_m\}$ linearno nezavisan sustav vektora iz unitarnog prostora U . Tada postoji sustav vektora $T = \{e_1, \dots, e_m\}$ u U sa svojstvima:

(1) T je ortonormirani sustav

(2) $[\{a_1, \dots, a_k\}] = [\{e_1, \dots, e_k\}]$ za sve $k = 1, \dots, m$.

NAPOMENA 1.15. (1) Vektore

$$\{e_1, \dots, e_m\}$$

definiramo induktivno s:

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i \rangle e_i, \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}, \quad k = 2, \dots, m.$$

(2) Iz gornjeg teorema slijedi da svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor ima ortonormiranu bazu.

(3) Svaki ortogonalni sustav u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru može se nadopuniti do ortogonalne baze tog prostora.

ZADATAK 1.10. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom dani su vektori $a_1 = (1, 2, 2)$, $a_2 = (1, -2, 0)$ i $a_3 = (-1, 0, 1)$. Dokažite da su ti vektori linearno nezavisni i ortonormirajte ih.

RJEŠENJE Imamo $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Nadalje, $b_2 = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1 = \frac{1}{3}(4, -4, 2)$ pa je $e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. Konačno,

$$b_3 = a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{9}(-8, -4, 8)$$

pa je $e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$. Pošto je $\dim[\{a_1, a_2, a_3\}] = \dim[\{e_1, e_2, e_3\}] = 3$, to su vektori a_1, a_2, a_3 linearno nezavisni. □

NAPOMENA 1.16. Općenito, vektori $\{a_1, \dots, a_m\}$ su linearno zavisni ako i samo ako se postupak ortogonalizacije ne može provesti.

ZADATAK 1.11. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$, skupa polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog dva, sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad p, q \in \mathcal{P}_2$$

ortonormirajte standardnu bazu $\{1, t, t^2\}$.

RJEŠENJE Uvedimo oznake $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = t^2$. Uočimo da je

$$\|p_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 dt} = \sqrt{t \Big|_{-1}^1} = \sqrt{1 - (-1)} = \sqrt{2}.$$

Stoga je $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalje imamo

$$b_2(t) = p_2(t) - \langle p_2, e_1 \rangle e_1(t) = t - \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 t dt \right) = t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-1}^1 = t$$

$$e_2(t) = \frac{b_2(t)}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt}} b_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1}} b_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

$$b_3(t) = p_3(t) - \langle p_3, e_1 \rangle e_1 - \langle p_3, e_2 \rangle e_2 = t^2 - \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 t^2 dt \right) - \frac{3}{2} t \left(\int_{-1}^1 t^3 dt \right) = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_3(t) = \frac{b_3(t)}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt}} b_3(t) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$$

ZADATAK 1.12. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{C})$ sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*), \quad A, B \in M_2(\mathbb{C})$$

ortonormirajte bazu $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ i prikažite matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ u toj ortonormiranoj bazi.

RJEŠENJE Uvedimo oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$E_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = A_2 - \langle A_2, E_1 \rangle E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = A_3 - \langle A_3, E_1 \rangle E_1 - \langle A_3, E_2 \rangle E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \frac{B_3}{\|B_3\|} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = A_4 - \langle A_4, E_1 \rangle E_1 - \langle A_4, E_2 \rangle E_2 - \langle A_4, E_3 \rangle E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \frac{B_4}{\|B_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znamo da je $A = \langle A, E_1 \rangle E_1 + \langle A, E_2 \rangle E_2 + \langle A, E_3 \rangle E_3 + \langle A, E_4 \rangle E_4 = \sqrt{2} E_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} E_2 - \frac{1}{\sqrt{5}} E_3$.

DZ 1.1. U kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom odredite ortonormiranu bazu prostora razapetog vektorima

$$a = (1 + i, 1 - i, 1), \quad b = (1 - i, i, 2 + i) \quad \text{ i } \quad c = (i, 3 - 2i, 4).$$

1.3 Ortogonalni komplement

DEFINICIJA 1.17. Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i M, N neki njegovi podskupovi. Kažemo da su skupovi M i N ortogonalni, i pišemo $M \perp N$, ako je $\langle a, b \rangle = 0$, za sve $a \in M, b \in N$.

DEFINICIJA 1.18. Neka su L i M potprostori unitarnog prostora U . Suma potprostora L i M , $L + M$, je ortogonalna ako je $L \perp M$. Pišemo $L \oplus M$.

DEFINICIJA 1.19. Neka je U unitaran prostor i $\emptyset \neq S \subseteq U$. **Ortogonalni komplement** skupa S je skup

$$S^\perp = \{x \in U : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in S\}.$$

ČINJENICE 1.20.

1. Sigurno je $\langle 0, x \rangle = 0$, za sve $x \in S$, pa je $0 \in S^\perp$. Specijalno je $S^\perp \neq \emptyset$.
2. $U^\perp = \{0\}$.
3. $\{0\}^\perp = U$.
4. $S^\perp \leq U$, za svaki $S \subseteq U$.
5. $S^\perp = [S]^\perp$.
6. $\dim S^\perp = \dim U - \dim[S]$.
7. Za svaki $x \in U$ postoje jedinstveni $a \in L$ i $b \in L^\perp$ takvi da je $x = a + b$ (još vrijedi da je $\langle a, b \rangle = 0$).
8. Neka je M potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U . Tada vrijedi $(M^\perp)^\perp = M$.

ZADATAK 1.13. U prostoru $\mathbb{R}^5$ potprostor M razapet je vektorima $a = (1, 2, 3, -1, 2)$ i $b = (2, 4, 7, 2, -1)$. Odredite $M^\perp$.

RJEŠENJE Prvi način: Skup $\{a, b\}$ je sustav izvodnica za M . Zato je $M = [\{a, b\}]$. Slijedi da je $x \in M^\perp$ ako i samo ako je $\langle x, a \rangle = 0$ i $\langle x, b \rangle = 0$. Dakle, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in M^\perp$ ako i samo ako je

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ovo je homogen sustav i skup svih njegovih rješenja je $M^\perp$. Rješenja su

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r \underbrace{(-2, 1, 0, 0, 0)}_{=:u} + s \underbrace{(13, 0, -4, 1, 0)}_{=:v} + t \underbrace{(-17, 0, 5, 0, 1)}_{=:w}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Prema tome je $M^\perp = [\{u, v, w\}]$ i baza za $M^\perp$ je $\{u, v, w\}$.

Drugi način: Nadopunimo linearno nezavisni skup $\{a, b\}$ do baze za $\mathbb{R}^5$. Uzmemo li npr.

$$c = (1, 0, 0, 0, 0), \quad d = (0, 1, 0, 0, 0), \quad e = (0, 0, 1, 0, 0)$$

tada će skup $\{a, b, c, d, e\}$ biti baza za $\mathbb{R}^5$. Ortonormiramo li tu bazu po GS postupku, dobit ćemo ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ za $\mathbb{R}^5$ za koju vrijedi $[\{a, b\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Stoga je $M = [\{e_1, e_2\}]$ pa je $M^\perp = \{e_3, e_4, e_5\}$. Postupak ortogonalizacije baze $\{a, b, c, d, e\}$ ostavljamo za zadaću. $\square$

ZADATAK 1.14. U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : XA = X\}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $M^\perp$.

RJEŠENJE Odredimo najprije bazu za potprostor M . Uočimo da je $X \in M$ ako i samo ako je $X(A - I) = 0$. Neka je

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M.$$

Tada mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno $b+c=0$, $e+f=0$, $h+i=0$. Stoga je $X \in M$ ako i samo ako vrijedi $c=-b$, $f=-e$, $i=-h$, odnosno ako i samo ako je X oblika

$$\begin{bmatrix} a & b & -b \\ d & e & -e \\ g & h & -h \end{bmatrix}.$$

Stoga je jedna baza za M dana sa

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Označimo te matrice redom s $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Vrijedi $Y \in M^\perp$ ako i samo ako je vektor Y okomit na sve vektore baze za M . Dakle,

$$Y = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ o & p & q \end{bmatrix} \in M^\perp$$

ako i samo ako je $\langle Y, B_i \rangle = 0$ za sve $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, odnosno ako i samo ako je

$$x = 0, y - z = 0, u = 0, v - w = 0, o = 0, p - q = 0.$$

$$\text{Dakle, } M^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & y \\ 0 & v & v \\ 0 & p & p \end{bmatrix} \mid y, v, p \in \mathbb{R} \right\}$$